

<http://homepage1.nifty.com/haniu/nuas/solid-symmetry.pdf>

立体の対称性

対称性とは、ある図形が、特定の変換（回転、鏡映、平行移動など）によって自分自身と一致するような性質だった。

空間図形（立体）についても、回転、鏡映（面反射）、平行移動、その他によって自分自身と一致するような性質（対称性）がある。

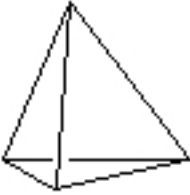
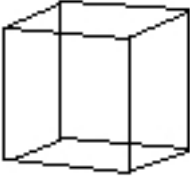
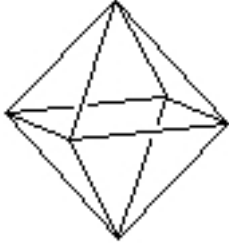
問 人間の体の外形はどんな対称性をもつか？

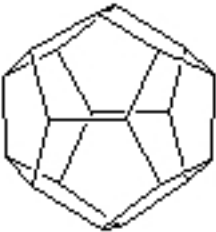

正多面体

対称性を多くもつ立体として古くから知られる正多面体について少しだけ見ておこう。

正多面体とは、どの面も 1 種類の正多角形で、どの頂点の周りにも同じ数の正多角形が集まってできる立体である。（正確に言うと、さらに、“へこみ”のない形、すなわち凸多面体）

正多面体は、次の図の 5 種類しかないことがわかっている。正多面体については、紀元前 6 世紀頃から古代ギリシャの数学者たちが研究している。

	正 4 面体	正 6 面体	正 8 面体
			
面の形	正 3 角形	正方形	正 3 角形
面の個数	4	6	8
頂点の個数	4	8	6

	正 12 面体	正 20 面体
		
面の形	正 5 角形	正 3 角形
面の個数	12	20
頂点の個数	20	12

球接立体を作る

正多面体の各頂点を同じ大きさの球で置き換えた立体を作り，その形の対称性を調べよう。

正 4 面体の 4 つの頂点を球で置き換えた立体



この形を次のように見て，中心を通り紙面に垂直な軸のまわりに回転させると， 度 回転しても元の形にピッタリ重なる。つまり，この回転軸に関して 度 回転対称である。ただし，回転角は最も小さい正の角で答えてください(以下も同様)。



また，この形は鏡映対称でもある。立体の鏡映対称は，軸ではなく特定の平面に関して，左半分と右半分の形がたがいにその平面を鏡にしたときの像のようになっていることをいう。上の形には，3 つの平面に関して鏡映対称であることがわかる。

同じ形を次のように見ると、中心を通り紙面に垂直な軸に関しては、度回転対称である。このように、立体の回転対称には、回転軸の取り方により異なる回転対称が現れる。

また、上の形には、2つの平面に関して鏡映対称であることがわかる。



正20面体の12個の頂点を球で置き換えた立体（正12面体の12個の面を球で置き換えた立体と言ってもよい）

それぞれの向きから見てわかる回転対称の角度（最小の正の角だけ）と、鏡映対称の面の数を教えてください。



度回転対称。鏡映対称の面は、面



度回転対称。鏡映対称の面は、面



度回転対称。鏡映対称の面は、面

その他の対称性 平面図形にも立体図形にも、これまでに挙げた以外の対称性もある。たとえば、上で作った12球の立体の各点を中心点と反対側で中心点からの距離が等しいような点に移動すると、元の立体と一致する。この性質は、立体の中心点に関する点対称性という。

球接立体の工作

多面体に限らないで、球を接してできる形を開拓したい。
一例として、先の正四面体型を変形してできる螺旋。



作り方. 球に番号①②③…をつけて説明する. まず, ①②③ をたがいに接するようにして三角形型にして接着剤でくっつける. ①②③ の中央にできるクボミに④ をくっつけて正四面体型になる. 次に, ②③④ でできるクボミに⑤ をくっつける. 次に, ③④⑤ でできるクボミに⑥ をくっつける. 以下同様に繰り返してゆく.

番号順に3色, たとえば, 赤, ピンク, 白, 赤, ピンク, 白... とすると, 3色の螺旋がからまった形ができる.

スコットランドの石玉



写真は B.C.3000 年頃作られたスコットランド (イギリス北部) の石玉 (stone ball) 正四面体の 4 面がふくらんだ形をしている。

上の写真は, Ralf H. Abraham 氏のページから

<http://www.ralph-abraham.org/courses/math181/math181.S96/lectures/lecture.4w/ball4.html>

スコットランドには, 新石器時代の紀元前 3000 年 ~ 2000 年頃に作られた多面体型の石玉 (stone balls) が, たくさん見つっている. 何のために作られたかはわかっていない. さまざまな形があるのだが, その中には, 正多面体の面を丸っこくしたような形も, 見つっている.

次の石玉の写真は Neolithic Carved Stone Polyhedra (by George Hart) のページから.

<http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/neolithic.html>



左から順に、正 8 面体、正 6 面体、正 20 面体の各頂点を球状突起で置き換えた形になっている。あるいは、正 6 面体、正 8 面体、正 12 面体の各面を球状突起で置き換えた形ともいえる。

これらスコットランドの石玉は、正多面体と同じ対称性を持つ立体としては最も古く、正多面体がギリシャで数学的に研究されるよりも 1500 年前～2500 年前のことである。