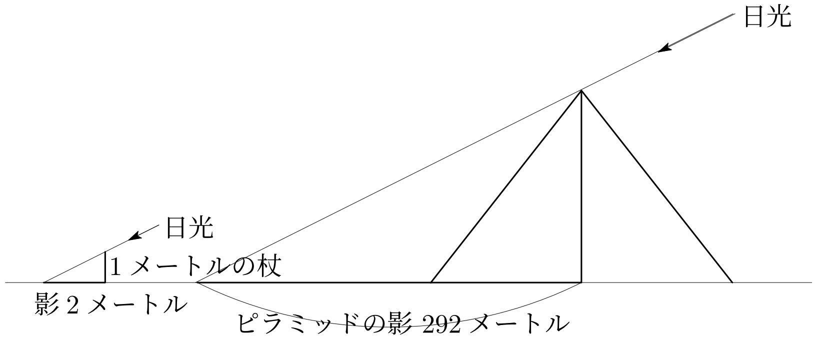
http://homepage1.nifty.com/haniu/nuas/section2.pdf

形と比 (続き)

比の計算練習

問 1 エジプトのギザにある一番高いピラミッドのそばで, 長さ 1 メートルの杖を地面に垂直に立てたとき, 杖の影は 2 メートルだったとする.

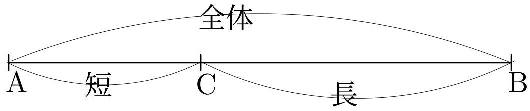
同じとき, ピラミッドが作る影の長さは 292 メートルだった。では, ピラミッドの高さは？



問 2

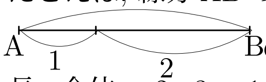
ナナちゃん人形の高さは？

黄金分割



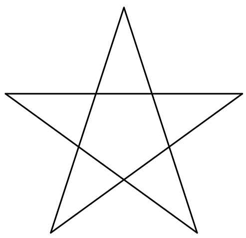
黄金分割と呼ばれているのは, 次のような線分の分割の仕方のことである.
線分の全体 (AB) を, 短めの部分 (AC) と長めの部分 (CB) に分けて,
短 : 長 = 長 : 全体
となるように分割すること.
紀元前 300 年頃のギリシャの数学者ユークリッドの書いた「原論」に, 上のような黄金分割の正確な意味が記されている. ただし, 「黄金分割 (golden section)」という名称は, 近代 19 世紀以降の呼び名だという.

黄金分割の比を探す

たとえば, 線分 AB の全体を,


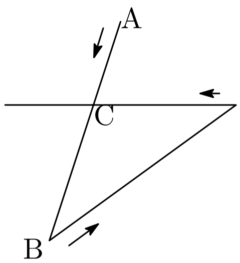
のように, 短：長 = 1 : 2 となるように分けると,
長 : 全体 = 2 : 3 = 1 : 1.5 となる.
これは, 短 : 長 = 1 : 2 とはだいぶ違う.
では, 短 : 長 をどんな比にするとよいだろうか ?

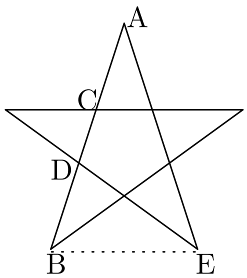
ペンタグラム (五芒星) と黄金分割



一筆書きで書ける星型を, 星のとんがりが正五角形の頂点になるように描くとペンタグラム (五芒星) になる.

一筆書きの途中で, 前に描かれた線分を横切るが, これが黄金分割になっている. (証明は後述)
図ならば, 点 C は, 線分 AB を $1 : \phi = 1 : 1.618\cdots$ に分割する.





CB と AD は同じ長さなので, AC : CB = AC : AD となり, AC : AD も黄金比である. さらに, 黄金分割において, 長 : 全体 = 短 : 長 なので, AC : AD = CD : AC となり, CD : AC も黄金分割であることがわかる.

ペンタグラムと形の呪力

ペンタグラムは, 古くから, 世界各地の文化に現れてきた興味深い図形である. およそ時代順に挙げる.

- 5 つのとんがりを持つ形は古代エジプトの模様にも現れる.(天の女神ヌウトの体にたくさん描かれている) また, 古代バビロニアの絵図に星型五角形があるそうだ.

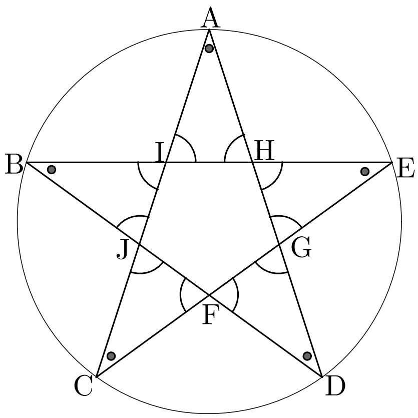
- 古代ギリシャの数学者たちは, ペンタグラムと黄金分割の関係を知っていた. ただし, 黄金分割は単に「分割」と呼ばれ, その比は「中外比」と呼ばれた.「黄金分割 (golden section)」という言い方は 19 世紀以降であるという.

  古代ギリシャのピタゴラス派 (B.C 6 世紀以降) は, 東方帰りの教祖ピタゴラスが始めた教団で, 数学, 天文学, 音楽などを研究していたが, その教団のシンボルとしてペンタグラムを用いた. このピタゴラス派が, 無

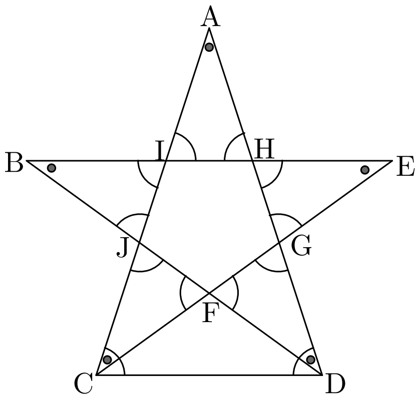
理数 (分数で表せない数) を発見し, ショックのあまりその発見を外部に秘密にしたと言われる. その発見のきっかけとなった無理数が $\sqrt{2}$ なのか $\phi(=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618)$ なのかその他の数かはわからないが, ϕ が最も初期に研究された無理数のひとつだったことは想像できる.

- 平安時代の日本の陰陽師 (おんみょうじ, まじない師みたいなもの), 安倍清明 (あべのせいめい) はペンタグラムを紋章として使っていた. 京都の晴明神社に行くと提灯 (ちょうちん) や瓦など至る所にペンタグラムが張りついている. 名古屋市千種区晴明山 (名古屋ドームの近く) にも晴明神社がある. ここは宮仕もいない小さな神社だが, 近年の”安倍清明ブーム”で, OL や高校生の参拝も増えているという.
- 日本の海女 (あま) のお守り.
- 西洋でも星形は魔除けに使われている. たとえば, ゲーテの「ファウスト」では, 悪魔メフィストフェレスは, 主人公ファウストの部屋に描いてあった魔除けの星形の角のひとつがちょっと開いていたので部屋に入りこめた, とある.
- 西洋の秘密結社フリーメーソンのマーク.

ペンタグラムに黄金分割が現れる数学的証明



ペンタグラムは, 円周を 5 等分する点を結んでできる. 左図で, たがいに同じ大きさの角を同じ印で表した.



次に, 2 点 CD を結ぶ. BE と CD は平行になるので, $\angle$ACD $=$ $\angle$AIH(平行線の同位角) などとなり, 再び, 同じ大きさの角を同じ印で表した. 等しい大きさの角に注意すると,
$\triangle$AIH $\sim$ $\triangle$ACD $\sim$ $\triangle$DJC. ($\sim$ は相似)
すると,
CJ : JD $=$ DC : CA $\cdots$①

ところで, $\triangle$DJC は2角が等しいので二等辺三角形である. よって, DC $=$ JD.
また, $\triangle$JDA は 2 角が等しいので二等辺三角形である. よって, JD $=$ JA.
まとめて, DC $=$ JD $=$ JA $\cdots$②.
①②より,
CJ : JA $=$ JA : CA $\cdots$③
③ は 点 J が線分 CA を黄金分割することを表している. つまり,
CJ : JA $=$ JA : CA $= 1 : \phi$.
同様にして, HI : IA, DC : CA, CJ : JD などもすべて黄金分割の比 $1 : \phi$ であることがわかる.