

運動の数学

– ものの“動き”を数学でえがく –

(中学の数学から力学と微分積分への橋渡し)

1 速さから微分法へ

問 1 B 氏は自動車で家を出発し, ちょうど 2 時間後に 80km はなれた町に着いた. この自動車の速さは?

問 2 机をななめにしてビー玉をころがす. 2メートルころがるのに ちょうど 1 秒かかったとする. このビー玉の速さは?

問 2 のビー玉の速さは「だんだん速くなる」と考えた人が多いだろう。「だんだん速くなる」ということは「はじめの速さ」と「中ごろの速さ」と「終わりころの速さ」が違うということではないか？ 一方で、2メートルを 1 秒で動くから

$$2 \text{メートル} \div 1 \text{秒} = \text{毎秒} 2 \text{メートル}$$

と考えると、速さはただひとつの値、毎秒 2メートルで表されている。「だんだん速くなる速さ」と毎秒 2メートルという「速さ」はどっちが本当なのか？

ひるがえって問 1 を考えると、同じようなことが言える。自動車だって、スタートする時はだんだん速くなるし、到着するときはおそくなってから止まり、信号待ちや道路のこみぐあいで速さは変化しつづけているだろう。このように「変化する速さ」と $80 \div 2$ で計算される「40km/時という速さ」がある。

頭を整理して話しを進めるために、これから、

$$(\text{道のり}) \div (\text{時間}) \quad \text{あるいは、} \frac{\text{道のり}}{\text{時間}}$$

で計算される速さを、

平均速度

ということにする。「平均」というのは、速くなったりおそくなったりするのをならして考えた速さ、という意味だと考えればうなづきやすいだろう。

練習 1 S 君は、夜道を自転車で走っている。のぼりくだりや信号待ちでスピードは変わる。自転車についているランプは、速いときには明るく、おそいときには暗くなる。けれど、とにかく 30 分で 9km 進んだ。平均速度を分速で答えよ。

練習 1 で平均速度は 0.3km/分 (300m/分) であるが、「スピードは変わる」というときの「変化する速さ」はどう考えたらよいだろうか？「変化するほうの速さ」は、のぼりやくだりの、その時々でちがう。「その時その時ごとの速さ」があるといえるだろう。「その時その時ごとの速さ」は自転車のランプの明るさで表されている。

実験 1 「その時その時ごとの速さ」を目で見えやすくするのに、動く物を写真でとったときのブレを見るという方法がある。もし撮影時のシャッタースピード (フィルムに光が当たる時間) が 0.1 秒で、一方、動く物体のブレの実際の長さを推測して 10cm だったとすると、この物体の速さは、

$$10\text{cm} \div 0.1 \text{ 秒} = 100\text{cm/秒} = 1\text{m/秒}$$

であるとわかる。

この方法で何か動く物の速さをはかる実験を計画して実行してみよ。(ビデオでもできる)

< 注 > 上の例で計算した 1m/秒は物体がカメラに写った「その時の速さ」と言いたくなるが、正確には、シャッタースピード 0.1 秒間の間の平均速度と言うべきだろう。

例 自動車に乗ってスタートする時、スピードメーターの針が 0km/時 からなめらかに動いていくのが見える。「速さの変化」と「その時その時ごとの速さ」はスピードメーターの針の動きにもよく現れているのである。

たとえば、スタートからきっかり 2 秒後にスピードメーターの針が時速 15km の目盛りを通過したとする。きっかり 2 秒後という「瞬間」に時速 15km という「速さ」であるということらしい。

問 3 自動車スタートし、一直線に走るとする。スタートしてから t 秒で進んだ道のりを x メートルとすると、最初の 4 秒間について t と x の関係式が、

$$x = t^2$$

だったとする。

まず、この自動車の運動をイメージしやすくするため、対応表 (表 1) の空欄をうめてください。

表 1: $x = t^2$ の対応表

t	0	1	2	3	4
x					

また、横軸を t 、縦軸を x とするときの $x = t^2$ (ただし、 $0 \leq t \leq 4$) のグラフ (図 1) をかいてください。

図 1: $x = t^2$ のグラフ

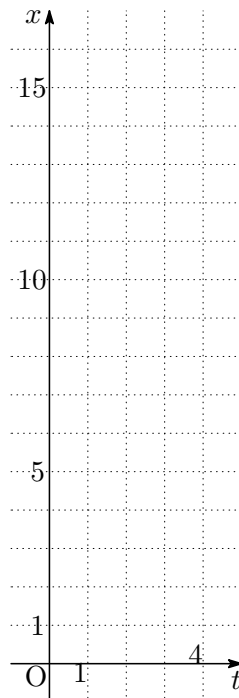


表1や図1からもこの自動車の運動はだんだん速くなっている様子がかかる。そこで時間を追って平均速度を調べてみよう。

たとえば $t = 1$ から $t = 2$ までの平均速度を計算すると

$$\frac{\text{道のり}}{\text{時間}} = \frac{4 - 1}{2 - 1} = 3\text{m/秒}$$

である。

問4 問3の運動 $x = t^2$ について他の時間についても平均速度を計算して表に書きこもう。

時間 t 秒	位置 x メートル	1秒間の位置変化(メートル)	1秒ごとの平均速度(メートル/秒)
0			
1	1		
2	4	3	3
3			
4			

上の計算結果からもだんだん速くなっていく様子はわかる。しかし、自動車の速度はもっとなめらかに増えていくはずである。そこで時間間隔をもっと細かくしてそれぞれの平均速度を求めてみよう。

練習 2 問 3 の運動 $x = t^2$ について, 0.1 秒きざみの時間間隔で, それぞれの平均速度を計算して表にしよう.

時間 t 秒	位置 x メートル	0.1 秒間の位置変化 (メートル)	0.1 秒ごとの平均速度 (メートル/秒)
0.0	0.00	0.01	0.1
0.1	0.01	0.03	0.3
0.2	0.04		
0.3			
0.4			
0.5			
0.6			
0.7			
0.8			
0.9			
1.0			
1.1			
1.2			
1.3			
1.4			
1.5			
1.6			
1.7			
1.8			
1.9			
2.0			
2.1			
2.2			
2.3			
2.4			
2.5			
2.6			
2.7			
2.8			
2.9			
3.0			

練習 2 の表から、位置は時間の 2 次関数 ($x = t^2$) なのに対して、平均速度は、時間とともに同じ調子で増えていくこと、つまり、平均速度は時間に対して 1 次関数的であることがわかる。

もっと時間間隔を短くしてゆくと、平均速度はどうなってゆくだろう。時間 $t = 1$ の近くだけを考えてみる。

問 5 問 3 の運動について次のそれぞれを計算せよ。電卓を使うと楽。

(i) $t = 1$ から $t = 1.1$ までの平均速度。

(ii) $t = 1$ から $t = 1.01$ までの平均速度。

(iii) $t = 1$ から $t = 1.001$ までの平均速度。

では、時刻 $t = 1$ の「瞬間」の速度を考えて、

(iv) 「 $t = 1$ から $t = 1$ までの平均速度」は計算できるか？

では、(i)(ii)(iii) と逆に $t = 1$ の直前から考えて次を計算せよ。

(v) $t = 0.9$ から $t = 1$ までの平均速度。

(vi) $t = 0.99$ から $t = 1$ までの平均速度。

(vii) $t = 0.999$ から $t = 1$ までの平均速度。

問 6 以上の結果から、あなたなら「時刻 $t = 1$ の瞬間の速度」というものをどう考えるだろうか？ 次の選択肢をめぐってどう考えるか？

(イ) 時刻 $t = 1$ の瞬間の速度は 2m/秒。

(ロ) 「瞬間」の速度というものは考えられない。

(ハ) その他。

前問 (問 6) に対して, 数学や物理学は

(イ) 時刻 $t = 1$ の瞬間の速度は 2m/秒.

と答えている.

髪の毛を一本ずつより分けるような細かな話だったが, 「微分」と呼ばれる数学が, 小学校で習う速さの計算を踏み越えて進んだ核心部分は, もうこれで終わりである.

問 5 の (iv) 「 $t = 1$ から $t = 1$ までの平均速度」が計算できないので, そのかわりに $t = 1$ の近くの時間間隔をどんどん短くして行って平均速度が近づいていく目的の値を $t = 1$ の「瞬間」の速度とする, ということ.

もし, $x = t^2$ の運動をする自動車があれば, スタートから 1 秒後にスピードメーターの針は 2m/秒 (時速 7.2km) を指しているということになる.

問 7 時刻 $t = 1$ での瞬間の速度が 2m/秒とわかったが, 他の時刻での瞬間の速さはいくらだろう. 予想でよいから表 2 の空欄を埋めよ.

表 2: $x = t^2$ の速度対応表

t 秒	x メートル	瞬間の速度 m/秒
0	0	
1	1	2
2	4	
3	9	
4	16	

時刻 $t = 1$ での瞬間の速度を求めたのと同様の計算をすると, $x = t^2$ の運動の各時刻での瞬間の速度は表 3 のようになることがわかる.

表 3: $x = t^2$ の速度対応表 (答)

t 秒	x メートル	瞬間の速度 m/秒
0	0	0
1	1	2
2	4	4
3	9	6
4	16	8

練習 3 気になる人は, たとえば時刻 $t = 3$ での瞬間の速度を次の手順で求めてみよ.

(i) $t = 3$ から $t = 3.1$ までの平均速度.

(ii) $t = 3$ から $t = 3.01$ までの平均速度.

(iii) $t = 3$ から $t = 3.001$ までの平均速度.

では, 時刻 $t = 3$ の「瞬間」の速度はいくらか?

以下では「瞬間の速度」を単に「速度」と言うことにする。
 表 3 を見ると、時刻 t の値を 2 倍すると、その時刻の速度の値になっている。

したがって、任意の時刻 t 秒における速度を v メートル/秒と表すと、

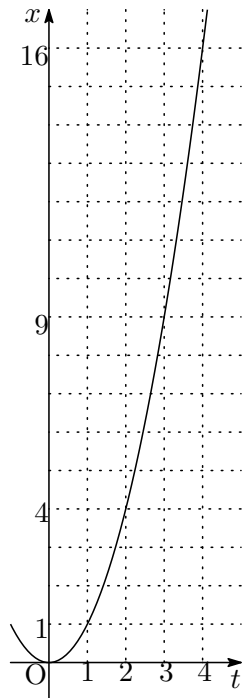
$$v = 2t \quad (1)$$

となるだろう。

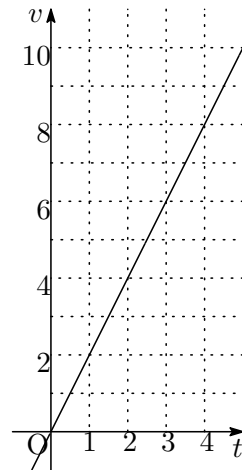
この運動について、位置のグラフと速度のグラフは図 2.

図 2: $x = t^2$ ($t \geq 0$) の運動について

$$x = t^2 \quad (t \geq 0)$$



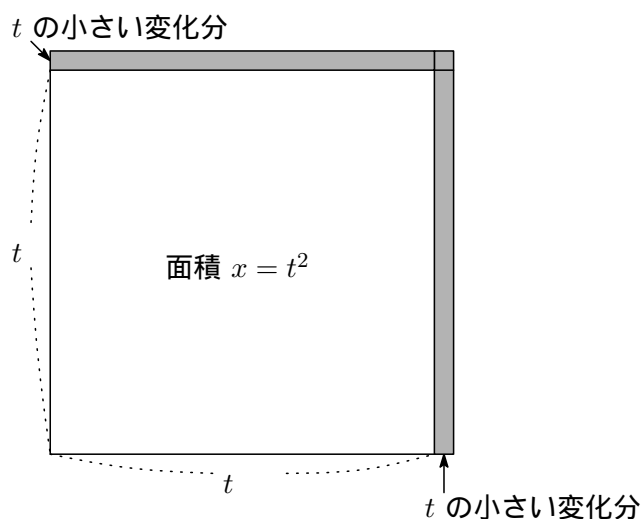
$$v = 2t \quad (t \geq 0)$$



【参考】 $x = t^2$ ならば $v = 2t$ であることの図形的説明.

1 辺の長さが t である正方形の面積を x とすると, $x = t^2$ である.

図 3: 1 辺の長さ t の正方形



時間 t とともに, 辺の長さが増えて面積 x がどんどん大きくなってゆくとイメージしてもよい.

v はおよそ $\frac{\text{動いた距離}}{\text{短い時間}} = \frac{x \text{ の小さい変化分}}{t \text{ の小さい変化分}}$ だったが, 上の正方形で考えると,

$$v \approx \frac{\text{面積の変化分}}{t \text{ の小さい変化分}}$$

である. 面積がふくれあがる速さと思ってよい.

分子の「面積の変化分」は図のカギ型の図形の面積であるが, カドの小さい正方形なんかちっちゃいから,

$$(\text{面積の変化分}) \approx t \times (t \text{ の小さい変化}) \times 2$$

である. だから,

$$v \approx \frac{t \times (t \text{ の小さい変化}) \times 2}{t \text{ の小さい変化}} = 2t$$

だから,

$$v = 2t$$

だろう. (\approx を $=$ に変えてしまったが, $(t \text{ の小さい変化})$ をどんどん小さくすれば, これはインチキでないことも実はわかる.)

【参考】 7 ページから式 (1) を得るまでを文字式を使って導くならば次のようになる。

まず、時刻 $t = 1$ 秒における瞬間の速度を求める。平均速度を計算するための時間間隔を

$$t = 1 \text{ 秒から } t = 1 + h \text{ 秒まで}$$

とおこう。 h は 0 でない数である。すると、この時間間隔での平均速度は、

$$\begin{aligned} \frac{\text{位置の変化}}{\text{時間の変化}} &= \frac{(1+h)^2 - 1^2}{(1+h) - 1} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} \\ &= \frac{2h + h^2}{h} = \frac{h(2+h)}{h} \\ &= 2 + h \end{aligned}$$

となる。(この結果から、たとえば $h = 0.01$ とすると、 $t = 1$ から $t = 1.01$ までの平均速度が $2 + 0.01 = 2.01$ m/秒とわかる。また、 $h = -0.01$ とすると $t = 1$ から $t = 0.99$ までの平均速度が $2 - 0.01 = 1.99$ m/秒となり、問 3 の (v)(vi)(vii) のような場合もふくんでいることがわかる。)

$t = 1$ における瞬間の速度を得るために、時間変化 h を限りなく 0 に近づけると、平均速度 $2 + h$ は限りなく 2 に近づく。よって、 $t = 1$ における瞬間の速度は 2 m/秒である。

次に、任意の時刻 t に置ける瞬間の速度を求める。手順は同様。

t 秒から $t + h$ 秒までの平均速度は、

$$\begin{aligned} \frac{\text{位置の変化}}{\text{時間の変化}} &= \frac{(t+h)^2 - t^2}{(t+h) - t} = \frac{t^2 + 2th + h^2 - t^2}{h} \\ &= \frac{2th + h^2}{h} = \frac{h(2t+h)}{h} \\ &= 2t + h \end{aligned}$$

となる。

時間変化 h を限りなく 0 に近づけると、平均速度 $2t + h$ は限りなく $2t$ に近づく。よって、任意の時刻 t 秒における瞬間の速度を v m/秒とおくと、

$$v = 2t$$

である。

練習 4 時刻 t 秒における位置を x メートルとして,

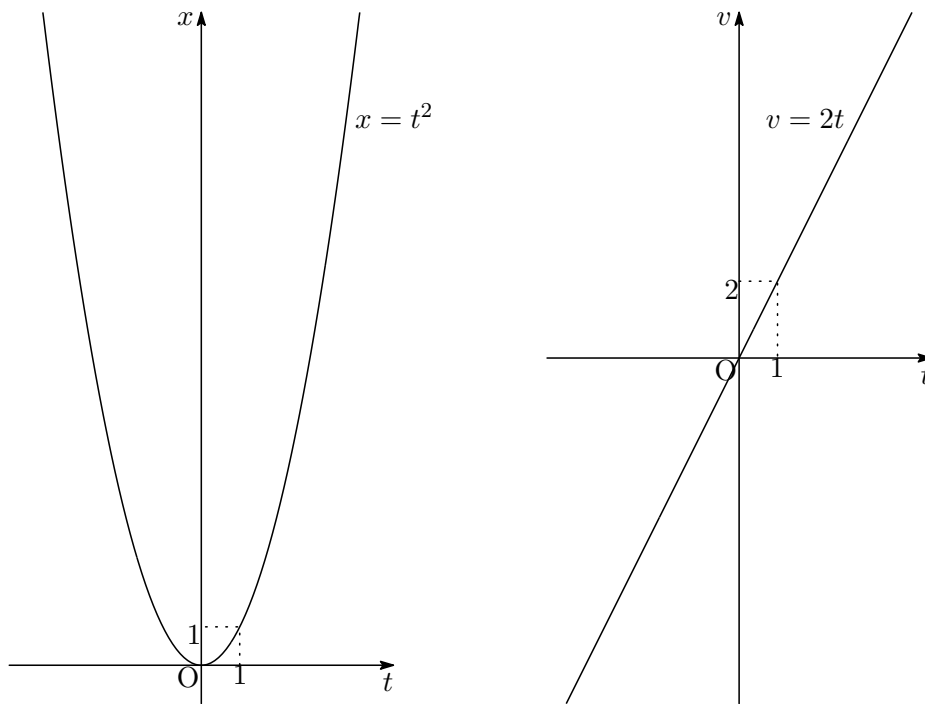
$$x = t^2$$

で表される運動を考える. このとき, t 秒における速度を v メートル/秒とすると,

$$v = 2t$$

である. このことを使って次の問に答えよ.

図 4:



- (1) 時刻 $t = 2.5$ 秒における速度を求めよ.
- (2) 時刻 $t = -3$ 秒における速度を求めよ.
- (3) 速度が 10 メートル/秒 (時速 36km) になるのはいつか?

問 8 時刻 t 秒における位置を x メートルとして,

$$x = 2t^2$$

で表される運動を考える. この運動の各時刻の速度を, $x = t^2$ の運動の速度とくらべると, どうなっているだろう.

(1) まず, 表 4 の空欄をうめて, 2 つの運動をイメージしてください.

表 4: $x = 2t^2$ と $x = t^2$ の運動をくらべる

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
t^2							
$2t^2$							

(2) $x = 2t^2$ の運動の各時刻の速度は, 同じ時刻の $x = t^2$ の運動の速度とくらべると, どうなっているか予想してください.

$x = 2t^2$ の運動の各時刻の速度は, 同じ時刻の $x = t^2$ の運動の速度とくらべると, つねに 2 倍になることがわかっています.

このことを式で表すと,

$$x = t^2 \quad \text{のとき} \quad v = 2t$$

だったから,

$$x = 2t^2 \quad \text{のとき} \quad v = 2 \times 2t = 4t$$

となる.

同様に, k を定数として,

$$x = kt^2 \quad \text{のとき} \quad v = k \times 2t \quad (2)$$

となる.

練習 5 時刻 t における位置を x として, 次の式で表される運動の速度 v を t の式で表せ.

(1) $x = 5t^2$

(2) $x = -3t^2$

練習 6 金属の物体をある高さから, 手を静かに離して落とす. 落としはじめからの時間を t 秒, t 秒間に落ちる距離を d メートルとする. 空気抵抗を無視すると, およそ,

$$d = 4.9t^2$$

となることが知られている.

(1) 落ち始めてから t 秒のときの物体の速度を v メートル/秒とすると, v を t の式で表せ.

(2) 落ち始めてから, 1 秒後, 2 秒後, 3 秒後それぞれの物体の速度を求めよ.

問 9 5メートル/秒の一定の速度で走るロボットがいたとする. このロボットが走り始めてから t 秒間に進む距離を x メートルとする.

- (1) x を t の式で表せ.
- (2) 速度を v とすると, v を表す式はどうなるか.

一般に, 時刻 t における位置を x , 速度を v とすると,

$$x = kt \quad (k \text{ は定数}) \text{ ならば, } v = k. \quad (3)$$

問 10 問 9 のロボットが, $x = 9$ メートルで突然止まって全然動かなくなった. このロボットが止まっている間について,

- (1) 位置 x を表す式はどうなるか.
- (2) 速度を v とすると, v を表す式はどうなるか.

一般に, 時刻 t における位置を x , 速度を v とすると,

$$x = k \quad (k \text{ は定数}) \text{ ならば, } v = 0. \quad (4)$$

練習 7 時刻 t における位置を x として, 次の式で表される運動の速度 v を t の式で表せ.

- (1) $x = 2t$.
- (2) $x = -3.6t$.
- (3) $x = -1$.
- (4) $x = 0.2t^2$

< 公式のまとめ > 時刻 t における位置を x , 速度を v とする. (k は定数)

$$x = kt^2 \quad \text{ならば, } v = k \times 2t \quad (2)$$

$$x = kt \quad \text{ならば, } v = k. \quad (3)$$

$$x = k \quad \text{ならば, } v = 0. \quad (4)$$

問 11 のぼりのエスカレーターが進む向きにそって 1 メートル/秒の一定速度で動いている。

(1) このエスカレーターを、エスカレーターに対して 1 メートル/秒の一定速度でのぼる人がいる。エスカレーターの上か下から止まって見ている人に対して、この人の移動する速度はいくらか？

(2) このエスカレーターを子どもが、エスカレーターに対して -1 メートル/秒 (すなわち、下のほうへ 1 メートル/秒) の一定速度で歩く。エスカレーターの上か下から止まって見ている人に対して、この子どもの速度はいくらか？

(3) このエスカレーターを子どもが、エスカレーターに対して -3 メートル/秒 (すなわち、下のほうへ 3 メートル/秒) の一定速度で走る。エスカレーターの上か下から止まって見ている人に対して、この子どもの速度はいくらか？

問 12 15 メートル/秒の一定速度で走っている電車の中を、進行方向の向きに一定速度 0.7 メートル/秒で歩いている人がいる。電車の外の止まっている人に対して、この人の動く速度はいくらか？

乗り物の上で動いている人について,

(乗り物の外から見た人の速度)

$$= (\text{乗り物の速度}) + (\text{乗り物に対する人の速度})$$

とまとめられる.

問 13 大型フェリーが岸を離れまっすぐ進む. スタートしてから t 秒間に進む距離が, $4t$ メートルだったとする. フェリーのスタートとともにフェリーの中を進行方向の向きに走り始める車があって, t 秒間にフェリーに対して進む距離が t^2 だったとする.(こんなことあるか?)

(1) この車が t 秒間に岸に対して進む距離を x メートルとするとき, x を t の式で表せ.

(2) フェリーの岸に対する速度, 車のフェリーに対する速度をそれぞれ t の式で表せ.

(3) この車の岸に対する速度を v メートル/秒とするとき, v を t の式で表せ.

問 13 の結果, 位置 x が,

$$x = 4t + t^2$$

のとき, 速度 v は

$$v = 4 + 2t$$

となっている. 位置 x がたしざんでむすばれた式で表されているとき, 速度 v を求めるには, x の右辺の各項 (上の例なら, $4t$ と t^2) の運動の速度 (4 と $2t$) を求めてからたせばよい.

練習 8 位置 x が次のとき, 速度 v を求めよ.

(例) $x = 3t^2 - 2t + 7$

$$v = 3 \times 2t - 2 = 6t - 2$$

- (1) $x = -5t^2 + 3t + 1$
- (2) $x = 2t^2 - t + 4$
- (3) $x = -2.5 - 3.7t$
- (4) $x = 20 - 4.9t^2$

練習 9 高いビルの窓から手を出して, 地上 44.1 メートルの高さから重い鉄球を静かに (上下の向きに力を加えずに) 落とす. 落とし始めてから t 秒後の鉄球の地上からの高さを y メートルとする. 空気抵抗を無視すると,

$$y = 44.1 - 4.9t^2$$

となる.

- (1) 鉄球が地上に落ちるまで何秒かかるか?
- (2) t 秒のときの鉄球の速度を v メートル/秒とする. v を t の式で表せ.
- (3) 地上に落ちるときの鉄球の速度を求めよ.

練習 10 ボールを真上に投げ上げる. ボールは地上 2メートルの高さで手を離れ, そのときの速度が上向き 19.6メートル/秒だったとする. ボールが手を離れてから t 秒後の地上からの高さを y メートルとする. 空気抵抗を無視すると,

$$y = 2 + 19.6t - 4.9t^2$$

となる. また, t 秒のときのボールの速度を v メートル/秒とする.

(1) v を t の式で表せ.

(2) (1) の結果から速度の様子を調べるために表 5 の空欄をうめてください.

表 5: 速度の表

t	0	1	2	3	4
v					

(2) ボールが最高の高さにいたるのは手を離れてから何秒後か? また, その時の高さは地上何メートルか?

練習 11 月面上では, 重力が地球上のおよそ $\frac{1}{6}$ しかないそうだ. 練習 10 と同じボールの投げ方をする. t, y, v も同じ意味とすると,

$$y = 2 + 19.6t - \frac{4.9}{6}t^2$$

となる.

(1) v を t の式で表せ.(数は分数の形のままでよい)

(3) ボールが最高の高さにいたるのは手を離れてから何秒後か? また, その時の高さは地上何メートルか?

< 数学用語の紹介 >

位置を表す時間の関数, たとえば, $x = t^2$ に対して,
速度を表す時間の関数, $v = 2t$ を $x = t^2$ の導関数という. もっと簡単に

関数 t^2 の導関数は $2t$ である.

といえる. 他の例.

関数 $3t^2 - 2t + 1$ の導関数は $3 \times 2t - 2$ すなわち, $6t - 2$ である.

導関数を求めることを「微分する」とも言う.

練習 12 次のそれぞれの関数の導関数を求めよ.

- (1) $-7t^2 + 5t - 3$.
- (2) $2 + 4x + 6x^2$.
- (3) πr^2 . (π は円周率 3.14159... で定数)

< 導関数の公式. 追加 >

関数 t^3 の導関数は $3t^2$ である. (5)

この公式についても, t^2 の導関数について 11 ページあるいは 12 ページに書いたのと同様にして説明できる. 興味のある人は試みてください. 図形的説明をするには, 1 辺の長さが t の立方体の体積を x として考えるとよい.

練習 13 次のそれぞれの関数の導関数を求めよ.

- (1) $4t^3 - 3t^2 + 2t - 1$
- (2) $\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t + 1$
- (3) $\frac{4}{3}\pi r^3$. (π は円周率 3.14159... で定数)

問 14 自動車スタートし、一直線に走るとする。スタートしてから t 秒のときの速度を v メートル/秒、スタートしてから進む距離を x メートルとする。最初の数秒間について

$v = 2t$ だったとする。このとき、 x を t の式で表せ。

問 14 のような場合、今までと逆に、 $v = 2t$ から $x = t^2$ を考え出す必要がある。このような場合にそなえて、まとめて考えておこう。

まず、数学用語の紹介。

t^2 の導関数は $2t$

であったが、逆に、

$2t$ の原始関数は t^2 である、(6)

という。すなわち、「 $2t$ の原始関数」とは「導関数が $2t$ であるような関数」のことである。(原始関数と導関数は母と子のような関係の言葉)

ところで、よく考えると、 t^2 だけでなく、

$$t^2 + 4, t^2 - 9, t^2 + 123.456, \dots$$

などもすべて、導関数は $2t$ であるから、 $2t$ の原始関数である。このことを、次のようにまとめておこう。

$2t$ の原始関数は $t^2 + C$ である。ただし、 C は任意の定数 (7)

((6) の言い方は少し不正確だったことになる。)

原始関数を求めることは、導関数を求めることの逆であることを表 [原始関数と導関数] にまとめておく。

表 6: 原始関数と導関数

右の関数の原始関数	左欄の関数の導関数
$t^2 + C$	$2t$
$kt^2 + C$	$k \cdot 2t$
$kt + C$	k
C	0

C と k は定数。

< 原始関数の計算例 >

$6t = 3 \times 2t$ の原始関数は $3 \times t^2 + C = 3t^2 + C$.

($3t^2 + C$ の導関数は $3 \times 2t = 6t$ となることが確かめられる.)

5 の原始関数は $5t + C$.

練習 14 次の関数の原始関数はそれぞれ何か？

- (1) $4t$
- (2) $10t$
- (3) -6
- (4) $6t - 7$
- (5) $-8t - 9$
- (6) 0

問 15 物体が一直線上を運動しており、位置を x メートル、時刻 t 秒のときの速度を v メートル/秒 とするとき、

$$v = 2t$$

であるような運動を考える。

- (1) $t = 0$ 秒のときの位置が $x = 3$ メートルだったとする.
 - (i) このとき、位置 x を時刻 t の式で表すとどうなるか？

(ii) この物体は 0 秒から 3 秒までに何メートル進むか？

- (2) $t = 0$ 秒のときの位置が $x = -2$ メートルだったとする.
 - (i) このとき、位置 x を時刻 t の式で表すとどうなるか？

(ii) この物体は 0 秒から 3 秒までに何メートル進むか？

問 15 の運動について次のようにまとめておく.

$v = 2t$ ならば, $x = t^2 + C$ (C は任意定数) である.

さらに, ある時刻での位置がわかれば (たとえば, 「 $t = 0$ 秒のときの位置が $x = 3$ メートル」のように) C の値もひとつに決まる.

また, 時刻 t_1 から時刻 t_2 までの位置の変化は, (t_2 における位置)-(t_1 における位置) だから,

$$(t_2^2 + C) - (t_1^2 + C) = t_2^2 - t_1^2$$

で計算できる. この値は C と関係ないので C がわからなくてもわかる.

練習 15 時刻 t 秒における地上からの高さを y メートル, 速度を v メートル/秒とする. (空気抵抗は無視しておく)

(1) 物体を静かに手をはなして落とす. すなわち, $t = 0$ のとき $v = 0$ だとする. このとき, 物体の速度 v は

$$v = -9.8t$$

となることがわかっている. また, 地上 100 メートルの高さから落としたとする. すなわち $t = 0$ のとき $y = 100$ とする. このとき, y を t の式で表せ.

(2) 物体を上向きに 10 メートル/秒の速度で投げあげる. すなわち, $t = 0$ のとき $v = 10$ だとする. このとき, 物体の速度 v は

$$v = 10 - 9.8t$$

となることがわかっている. また, 地上 1 メートルの高さから投げたとする. すなわち $t = 0$ のとき $y = 1$ とする. このとき, y を t の式で表せ.

速度から位置の変化を求める計算をまとめておく. 問 15 の $v = 2t$ のように, 速度 v が時間 t の関数として表されたとき,
時刻 t_1 から t_2 までの位置の変化を求めるには,
まず, v を表す t の関数の原始関数のひとつを求めて,

$$(\text{原始関数に } t_2 \text{ を代入して得た値}) - (\text{原始関数に } t_1 \text{ を代入して得た値}) \quad (8)$$

を計算すればよい. (8) を, ふつう, 次のように書き表す.

$$[\text{原始関数のひとつ}]_{t_1}^{t_2} \quad (9)$$

(例) 速度が $v = 2t$ の運動について, $t = 3$ から $t = 6$ までの位置変化は,

$$[t^2]_3^6 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27$$

練習 16 時刻 t 秒における速度を v メートル/秒とすると, 次の値を求めよ.

- (1) $v = 2t$ の運動について, $t = 0$ から $t = 1$ までの位置変化.
- (2) $v = 9.8 - 9.8t$ の運動について, $t = 0$ から $t = 1$ までの位置変化.
また, $t = 0$ から $t = 2$ までの位置変化.
- (3) $v = -3$ の運動について, $t = 4$ から $t = 9$ までの位置変化.

2 積分法の考え方

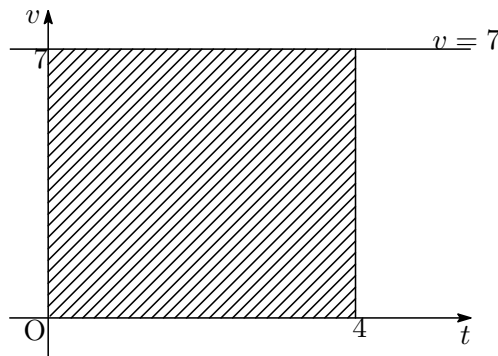
一定の速度 $v = 7$ メートル/秒の運動があったとして、4 秒間の位置変化は、原始関数を使わなくても、 $7 \times 4 = 28$ メートルでよい。

一般に、速度が一定の運動の場合、

$$(\text{一定速度}) \times (\text{時間}) = (\text{位置変化}) \quad (10)$$

である。また、速度のグラフで見ると、位置変化は斜線部分面積で表されていることがわかる。

図 5: $v = 7$ のグラフ



速度が一定でない運動の場合、(10) は使えないのだが、次のようなくふうをする考えかたがある。

問 16 練習 16 の (1) $v = 2t$ の運動で $t = 0$ から $t = 1$ までの位置変化を例にとる。 $t = 0$ のときの位置を $x = 0$ だったとする。

たとえば $t = 0.5$ から $t = 0.6$ までの 0.1 秒間について考えよう。 $t = 0.5$ のとき速度 $v = 2 \times 0.5 = 1$ メートル/秒で、 $t = 0.6$ のとき速度 $v = 2 \times 0.6 = 1.2$ メートル/秒だが、あまり変わらないから、この 0.1 秒間は $v = 1$ メートル/秒の一定速度と考えてしまう。すると、

$$(\text{この 0.1 秒間の位置変化}) \approx 1 \text{ メートル/秒} \times 0.1 \text{ 秒} = 0.1 \text{ メートル}$$

この場合の一定速度 1 メートル/秒は少しの変化を無視しているから近似速度である。

同様にして、どの 0.1 秒間についても、そのはじめの時刻の速度を近似速度として使ってみよう。まず、次の表の速度の欄と近似速度の欄をうめてください。

時間 t 秒	位置 x メートル	0.1 秒間の位置変化 (メートル)	0.1 秒間ごとの近似速度 (メートル/秒)	速度 (メートル/秒)
0.0	0.0			
0.1				
0.2				
0.3				
0.4				
0.5				1.0
0.6			1.0	1.2
0.7				
0.8				
0.9				
1.0				

次に、それぞれの近似速度に 0.1 秒をかけると、0.1 秒ごとの位置変化が出る。さらにこの位置変化を、 $t = 0$ のときの位置 $x = 0$ から始めて次々にたしてゆくと、0.1 秒ごとの位置が出る。

こうして、速度 $v = 2t$ という情報だけをもとにして、 $t = 0$ から $t = 1$ の 1 秒間にどれだけ進むか (位置変化) が、およそ計算できた。問 4 や練習 2 で、位置 $x = t^2$ から速度を求めたのと、だいたい逆向きのことをしている。

より正確な値を計算するには時間の分割を細かくしてゆけばよい。

問 17 問 16 と同様の計算を、時間分割を限りなく細かくしていくとき、 $t = 0$ から $t = 1$ の位置変化の計算値は、どんな値に近づくか? 予想せよ。

問 17 の正解を

関数 $2t$ の $t = 0$ から $t = 1$ までの定積分

といい、

$$\int_0^1 2t dt$$

と表す。 \int は インテグラル (integral) と読み、全部では「インテグラル 0 から 1 まで $2t dt$ 」などと読む。この記号を使うと、

$$\int_0^1 2t dt = \square$$

である。

(注) \int は S の古い字体のひとつで、英語で言うと sum (合計, 和) の頭文字を表す. dt は「無限に小さい t の差」という考えから作られた記号.(英語で "difference" は「差」, "differential" は「微分の」)

したがって, $\int_0^1 2t dt$ は, 記号順に直訳すると,

合計 ($t = 0$ から $t = 1$ まで) {(速度 $2t$) \times (無限小時間 dt)}

で, 意識すると,

「速度 $2t$ にうんと短い時間 dt をかけると, その短い時間の位置変化が得られ, それを時刻 $t = 0$ から $t = 1$ まで合計すると, 全部の位置変化になる。」

得られる値は, 25 ページの原始関数の引き算で得る値と同じだが, 考え方と計算法が違うので別の名前なのである.

定積分という言葉の意味をもう少し一般的にしておく.

v が t の関数であるとする. t の区間 $a \leq t \leq b$ を分割して, できた小区間ごとに, v の値をひとつずつ取る.(図 6 の v_1, v_2, \dots) そして,

(v の値) \times (t の小区間の幅) のすべての合計

を求める. 分割を限りなく細かくしてゆくと, この合計が, ある値に限りなく近づいてゆくとする. その近づく先の値が定積分であり,

$$\int_a^b (v \text{ を表す } t \text{ の式}) dt$$

である.

t が時間で v が速度ならば, 定積分 $\int_a^b (v \text{ を表す } t \text{ の式}) dt$ は, 時刻 a から b までの位置変化に等しい.

また, グラフを見ると, (v の値) \times (t の小区間の幅) の合計 は長方形の面積の合計に等しいことがわかる. そして, 分割を細かくしてゆくと, 長方形の面積の合計は, 図 7 の斜線部分面積に近づいてゆくことがわかる. したがって,

定積分 $\int_a^b (v \text{ を表す } t \text{ の式}) dt$ の値は 図 7 の斜線部分面積に等しい

と言える.

図 6: 簡単のためたった 5 分割にしている

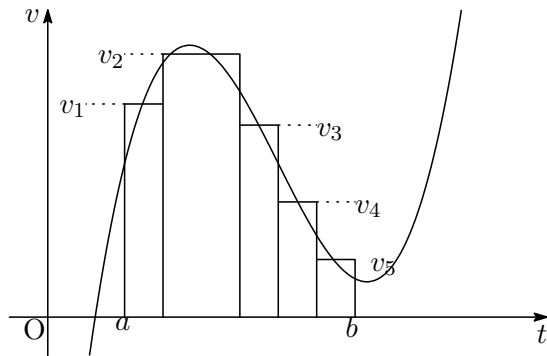
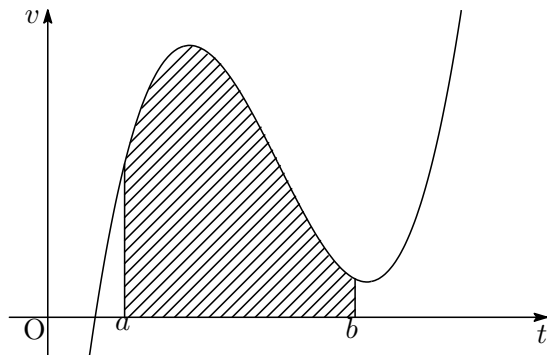


図 7: 定積分が表す面積



練習 17 一直線上の運動の時刻 t における速度を v とする. 次のそれぞれの値を定積分の記号で表せ. 定積分を求める計算はしなくてよい.

(例) $v = 2t$ のとき, $t = 0$ から $t = 3$ までの位置変化は

$$\int_0^3 2t dt$$

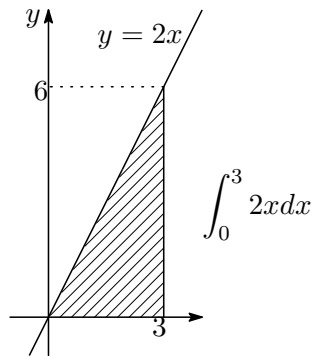
(1) $v = 3t$ のとき, $t = 1$ から $t = 5$ までの位置変化

(2) $v = 4$ のとき, $t = 3$ から $t = 11$ までの位置変化

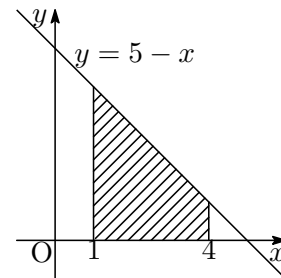
(2) $v = t^2$ のとき, $t = 0$ から $t = 1$ までの位置変化

練習 18 次の斜線部分の図形の面積を定積分の記号で表せ. 定積分を求める計算はしなくてよい.

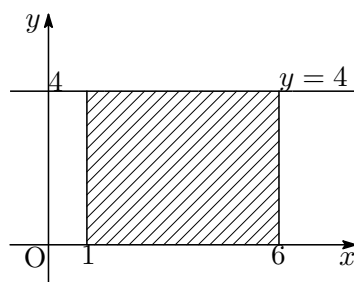
(例)



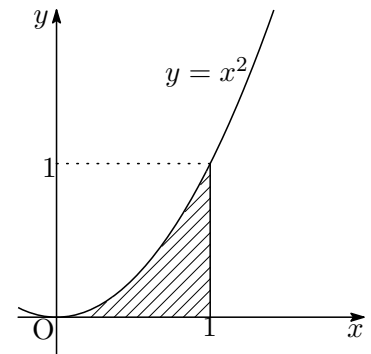
(1)



(2)



(3)



定積分の計算のしかた

$\int_0^1 2t dt$ を例に取って, 定積分の値の計算方法をまとめておく.

[1] 26 ページから示した方法. 小さな位置変化を積み重ねて大きな位置変化を得て, 時間の分割を細かくしていくと近づいてゆく先の値を求める. これが定積分本来の計算方法である.

その発想はおおざっぱにいうと「チリも積もれば山となる」。もう少しきちんというとして、「1ヵ月の貯金額は1日ごとの貯金額の合計である」という発想。

手間のかかる計算で、このテキストの実際の計算ではもう使わないが、コンピューターを使えば簡単に十分な精度の値を計算できる。計算法として使わなくても、この「定積分本来の考え方」をつかんでおくことは、微分積分を自分の道具として使いこなすのに大いに役立つ。

[2] $\int_0^1 2t dt$ は速度 $v = 2t$ の運動の時刻 $t = 0$ から $t = 1$ のまでの位置変化を表すが、これは、25 ページの (8) あるいは (9) のように原始関数の引き算でも計算できた。したがって、

$$\int_0^1 t dt = [t^2]_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1 \quad (11)$$

となる。

たとえば言うとして、「毎日の貯金額をメモしておかなくても、1ヵ月の貯金額は月末に貯金箱をあければわかる」という感じ。

(計算例) 練習 17 の (例) の定積分ならば、

$$\int_0^3 2t dt = [t^2]_0^3 = 3^2 - 0^2 = 9$$

練習 19 練習 17 と練習 18 で書いた定積分を [2] の (計算例) のようにして値を求めよ。

[2] の計算法 (11) を一般化して記しておく。

$2t$ とか $t^2 - 3t + 1$ などの (t の特定の式) に対し、

$$\int_a^b (t \text{ の特定の式}) dt = [(t \text{ の特定の式}) \text{ の原始関数}]_a^b \quad (12)$$

である。

左辺は「チリも積もれば山となる」の定積分で、右辺は、「小さい小さい時間での速さ」などを表す導関数の逆=原始関数による計算である。つまり、(12) は定積分と微分法の間を結ぶ関係を表している等式で、これこそ微分積分の要(かなめ)であり微分積分学基本定理と呼ばれている。17世紀後半にニュートン、ライプニッツなどによって発見された。

解答と解説

問 1 2 ページ参照.

問 2 2 ページ参照.

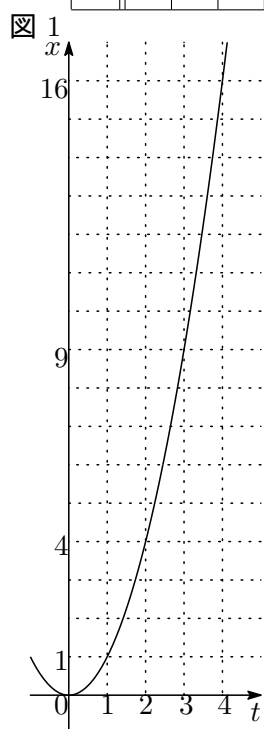
練習 1

$$(\text{平均速度}) = \frac{(\text{距離})}{(\text{時間})} = \frac{9\text{km}}{30\text{分}} = 0.3\text{km/分}$$

問 3

表 1

t	0	1	2	3	4
x	0	1	4	9	16



問 4

(i)

$$\begin{aligned} \text{平均速度} &= \frac{\text{道のり}}{\text{時間}} = \frac{(\text{終わりの位置}) - (\text{はじめの位置})}{(\text{終わりの時刻}) - (\text{はじめの時刻})} \\ &= \frac{1^2 - 0^2}{1 - 0} = 1 \text{メートル/秒} \end{aligned}$$

$$\text{(iii)} \quad \frac{3^2 - 2^2}{3 - 2} = 5 \text{メートル/秒}$$

$$(iv) \frac{4^2 - 3^2}{4 - 3} = 7 \text{ メートル/秒}$$

問 ??

問 5

$$(i) \frac{1.1^2 - 1^2}{1.1 - 1} = 2.1 \text{ メートル/秒}$$

$$(ii) \frac{1.01^2 - 1^2}{1.01 - 1} = 2.01 \text{ メートル/秒}$$

$$(iii) \frac{1.001^2 - 1^2}{1.001 - 1} = 2.001 \text{ メートル/秒}$$

(iv) もし、これまでと同じ形の計算式を書くと、 $\frac{1^2 - 1^2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$ となるが、分母が 0 の分数は”値がない”のでこまる。

あるいは、運動で考えると、「0 秒間に 0 メートル進む」ののだが、このようなことに速さを考えられるだろうか？

これについては次の問で考えよう。

$$(v) \frac{1^2 - 0.9^2}{1 - 0.9} = 1.9 \text{ メートル/秒}$$

$$(vi) \frac{1^2 - 0.99^2}{1 - 0.99} = 1.99 \text{ メートル/秒}$$

$$(vii) \frac{1^2 - 0.999^2}{1 - 0.999} = 1.999 \text{ メートル/秒}$$

問 6 8 ページ参照.

問 7 9 ページ参照

練習 3

$$(i) \frac{3.1^2 - 3^2}{3.1 - 3} = 6.1 \text{ メートル/秒}$$

$$(ii) \frac{3.01^2 - 3^2}{3.01 - 3} = 6.01 \text{ メートル/秒}$$

$$(iii) \frac{3.001^2 - 3^2}{3.001 - 3} = 6.001 \text{ メートル/秒}$$

時間間隔を限りなく小さくしてゆくと、平均速度は 6 メートル/秒に限りなく近づいてゆくだろう。したがって、時刻 $t = 3$ の「瞬間」の速度は 6 メートル/秒と考えられる。

練習 4

$$(1) v = 2t \text{ に } t = 2.5 \text{ を代入して } v = 2 \times 2.5 = 5 \text{ メートル/秒.}$$

$$(2) v = 2 \times (-3) = -6 \text{ メートル/秒.}$$

(3) $v = 2t$ に $v = 10$ を代入すると、 $10 = 2t$. これから、 $t = 5$. すなわち 5 秒後.

問 8

(1)

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
t^2	9	4	1	0	1	4	9
$2t^2$	18	8	2	0	2	8	18

(2) たとえば, 次のような推測もある. 2つの運動を, 1秒間隔ごとの平均速度でくらべてみる.

0秒から1秒までなら, $x = t^2$ の運動の平均速度は1メートル/秒で, $x = 2t^2$ の運動の平均速度は2メートル/秒.

1秒から2秒までなら, それぞれ, 3メートル/秒と6メートル/秒.

2秒から3秒までなら, それぞれ, 5メートル/秒と10メートル/秒.

いつも, $x = 2t^2$ の運動の平均速度は $x = t^2$ の運動の平均速度の2倍になっている. それならば, 時間間隔を限りなく短くしてえられる(瞬間の)速度も2倍になるのではないか.

練習 5

(1) $v = 5 \times 2t = 10t$ (2) $v = -3 \times 2t = -6t$

練習 6

(1) $v = 4.9 \times 2t = 9.8t$ (メートル/秒)

(2) (1) でえた式に $t = 1, t = 2, t = 3$ をそれぞれ代入する. 1秒後, 2秒後, 3秒後それぞれの物体の速度は, 9.8メートル/秒, 19.6メートル/秒, 29.4メートル/秒.

問 9

(1) $x = 5t$ (メートル). (2) $v = 5$ (メートル/秒)

問 10

(1) $x = 9$ (メートル) (2) $v = 0$ (メートル/秒)

練習 7

(1) $v = 2$. (2) $v = -3.6$. (3) $v = 0$. (4) $v = 0.2 \times 2t = 0.4t$.

問 11

(1) $1 + 1 = 2$ メートル/秒. (2) 0 メートル/秒. (計算するならば $1 - 1 = 0$) (3) $1 - 3 = -2$ メートル/秒.

問 12 $15 + 0.7 = 15.7$ メートル/秒

問 13

練習 8

練習 9

練習 10

練習 11

練習 12

練習 13

問 14

練習 14

問 15

練習 15

練習 16

練習 17

練習 18

練習 19